

对称图形——圆专题讲义

2.2 圆的对称性

课标知识与能力目标

- 1.理解圆的对称性及有关性质
- 2.掌握圆心角、弧、弦之间的关系
- 3.掌握垂径定理，并会运用定理解决有关问题

知识点 1：圆的对称性

圆是中心对称图形，对称中心是圆心；圆也是轴对称图形，对称轴是经过圆心的任意一条直线。

注意：（1）圆的对称轴有无数条。（2）圆还具有旋转不变性，即圆绕圆心旋转任何角度后，仍与自身重合。

典型例题

考点：命题判定

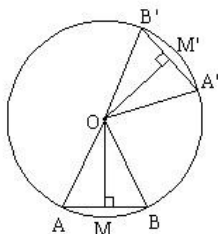
例 1 下列说法正确的是（ ）

- | | |
|-----------------|------------------|
| A.直径是圆的对称轴 | B.经过圆心的直线是圆的对称轴 |
| C.与圆相交的直线是圆的对称轴 | D.与半径垂直的直线是圆的对称轴 |

知识点 2：圆心角、弧、弦之间的关系

定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等。

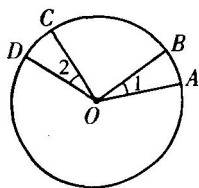
推论：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么他们所对应的其余各组量都分别相等。



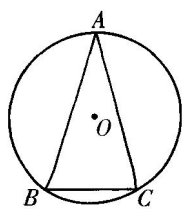
典型例题

考点 1：利用圆心角性质和推论求角度

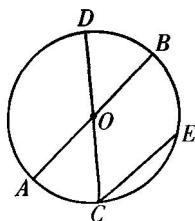
例 1 如图，在 $\odot O$ 中， $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ ， $\angle 1 = 25^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____.



例 2 如图，在 $\odot O$ 中， $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，则 $\angle ABC =$ _____.

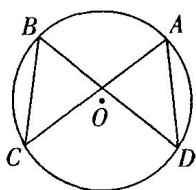


例 3 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CE \parallel AB$ ， \widehat{CE} 的度数为 70° ，则 $\angle AOC =$ _____.

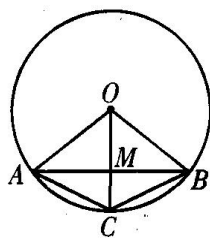


考点 2：利用圆心角性质和推论求弦长和线段长

例 1 如图，在 $\odot O$ 中， $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ ，若 $AC = 3$ ，则 $BD =$ _____.

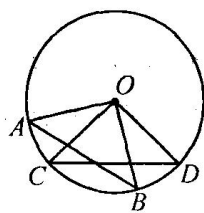


例 2 如图，AB、AC、BC 都是 $\odot O$ 的弦， $AB = 6$ cm， $\angle ABC = \angle BAC$ ，AB 与 OC 相交于点 M，求 AM 的长.



考点 3：利用圆心角性质和推论进行证明

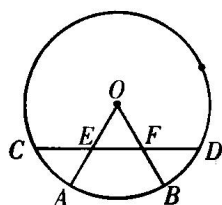
例 1 如图，AB、CD 为 $\odot O$ 的两条弦， $AB=CD$ ．求证： $\angle AOC=\angle BOD$ ．



例 2 如图， $\odot O$ 的半径 OA、OB 分别交弦 CD 于点 E、F，且 $CE=DF$ ．试问：

(1) OE 等于 OF 吗？

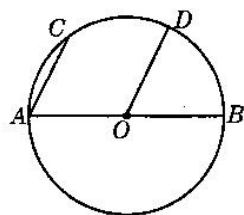
(2) \widehat{AC} 与 \widehat{BD} 有怎样的数量关系？



例 3 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径．

(1) 若 $OD \parallel AC$ ， \widehat{CD} 与 \widehat{BD} 的大小有什么关系？为什么？

(2) 把(1)中的条件和结论交换一下，还能成立吗？说明理由．



知识点 3：圆心角的度数与它所对的弧的度数的关系

1. 1° 的弧：将顶点在圆心的周角等分成 360 份时，每一份的圆心角是 1° 的角。因为同圆中相等的圆心角所对的弧相等，所以整个圆也被等分成 360 份，我们把 1° 的圆心角所对的弧叫做 1° 的弧。

2. 圆心角的度数与它所对的弧的度数的关系：圆心角的度数与它所对的弧的度数相等。

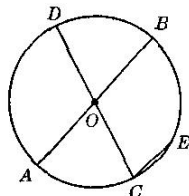
注意：（1）圆心角的度数与它所对的弧的度数相等，不是指角与弧相等（角与弧是两个不同的图形）

（2）度数相等的角为等角，但度数相等的弧不一定是等弧。

典型例题

考点：求圆心角

例 1 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CE \parallel AB$ ， \widehat{CE} 的度数为 40° ，则 $\angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。



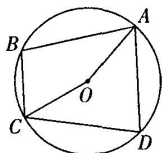
例 2 $\odot O$ 的一条弦 AB 把圆分成 2: 3 两部分，则弦所对的圆心角为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$ 。

能力提优

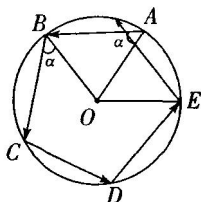
题型 1: 圆心角性质和推论

例 1 如图, 在 $\odot O$ 中, 弦 $AD \parallel BC$, $DA=DC$, $\angle AOC=160^\circ$, 则 $\angle BCO$ 的度数为 ()

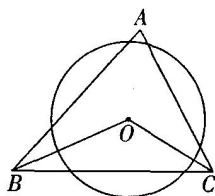
- A. 20° B. 60° C. 40° D. 50°



例 2 如图, 小华从一个圆形场地的 A 点出发, 沿着与半径 OA 夹角为 α 的方向行走, 走到场地边缘 B 点后, 再沿着与半径 OB 夹角为 α 的方向折向行走. 按照这种方式, 小华第五次走到场地边缘时处于 \widehat{AB} 上, 此时 $\angle AOE=56^\circ$, 则 $\alpha=$ _____ $^\circ$.



例 3 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=70^\circ$, $\odot O$ 截 $\triangle ABC$ 的三边所得的弦长相等, 则 $\angle BOC$ 的度数为 _____ $^\circ$.



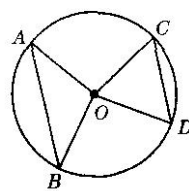
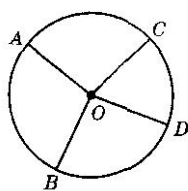
题型 2: 利用圆心角性质和推论比较弦长和弧长的大小

例 1 如图, 在同圆中, 若 $\angle AOB=2\angle COD$, 则 \widehat{AB} 与 $2\widehat{CD}$ 的大小关系是 ()

- A. $\widehat{AB} > 2\widehat{CD}$ B. $\widehat{AB} < 2\widehat{CD}$ C. $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ D. 不能确定

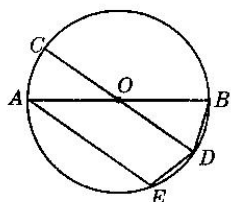
例 2 如图, 在同圆中, 若 $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$, 则 AB 与 $2CD$ 的大小关系是 ()

- A. $AB > 2CD$ B. $AB < 2CD$ C. $AB = 2CD$ D. 不能确定



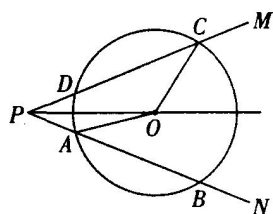
题型 3：圆心角性质和推论与综合证明

例 1 如图， AB ， CD 是 $\odot O$ 的两条直径，过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 $\odot O$ 于点 E ，连接 BD ， DE 。
求证： $BD = DE$ 。



例 2 如图，点 O 在 $\angle MPN$ 的平分线上， $\odot O$ 分别交 PN 、 PM 于点 A 、 B 和点 C 、 D 。

求证： $\angle PCO = \angle NAO$ 。

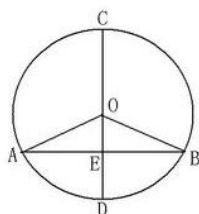


知识点 4：垂径定理及垂径定理的推论

1.垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧。

定理的条件：（1）直径，弦（2）直径垂直弦

定理的结论：（1）弦被直径平分（2）弦所对的两条弧被平分



2.垂径定理的推论

如果一条直线具有：（1）经过圆心；（2）垂直于弦；（3）平分弦（非直径的弦）；（4）平分弦所对的劣弧；（5）平分弦所对的优弧这五个性质中的任意两个，那么这条直线就具有余下的三个性质，简称“知二推三”。

注意：在垂径定理推论中，一定不能忽视“弦不是直径”这一条件。因为一个圆的任意两条直径都能互相平分，但未必垂直。

典型例题

考点 1：命题判定

例 1 下列说法中，不成立的是

()

- A. 弦的垂直平分线必过圆心 B. 弧的中点与圆心的连线垂直平分这条弧所对的弦
C. 垂直于弦的直线经过圆心，且平分这条弦所对的弧 D. 垂直于弦的直径平分这条弦

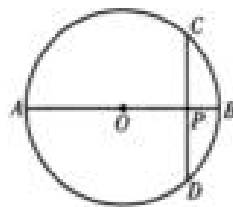
例 2 下列四个命题中，叙述正确的是

()

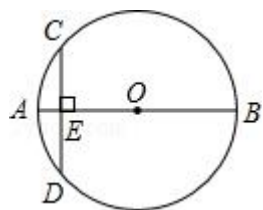
- A. 平分一条直径的弦必垂直于这条直径 B. 平分一条弧的直径垂直于这条弧所对的弦
C. 弦的垂线必经过这条弦所在圆的圆心 D. 平分一条弦的直线必经过这个圆的圆心

考点 2：利用垂径定理求弦长和半径

例 1 (2013 潍坊) 如图， $\odot O$ 的直径 $AB=12$ ， CD 是 $\odot O$ 的弦， $CD \perp AB$ ，垂足为 P ，且 $BP:AP=1:5$ ，则 CD 的长为_____.



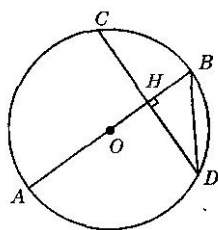
例 2 (2015•黔西南州) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 为 $\odot O$ 的一条弦， $CD \perp AB$ 于点 E ，已知 $CD=4$ ， $AE=1$ ，则 $\odot O$ 的半径为_____.



例 3 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 r ，弦 AB 垂直平分半径 OC ，则弦 AB 的长为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ B. $\sqrt{3}r$ C. $2\sqrt{3}r$ D. $4\sqrt{3}r$

例 4 如图，弦 CD 垂直于 $\odot O$ 的直径 AB ，垂足为 H ，且 $CD=2\sqrt{2}$ ， $BD=\sqrt{3}$ ，求 AB 的长.



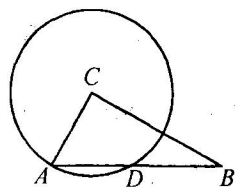
考点 3: 垂径定理解决平行弦问题

例 1 $\odot O$ 的半径为 17 cm ，弦 $AB \parallel CD$ ， $AB=30\text{ cm}$ ， $CD=16\text{ cm}$ ，求 AB 和 CD 之间的距离.

例 2 在半径为 13 的 $\odot O$ 中，弦 $AB \parallel CD$ ，弦 AB 和 CD 的距离为 7 ，若 $AB=24$ ，求 CD 的长.

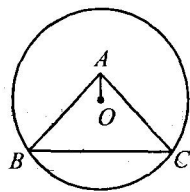
考点 4: 垂径定理与三角形性质综合应用

例 1 如图， $\angle C=90^\circ$ ， $\odot C$ 与 AB 相交于点 D ， $AC=5$ ， $CB=12$ ，则 $AD=$ _____.



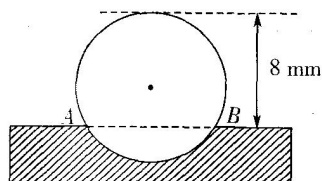
例 2 如图， $\odot O$ 过点 B 、 C ，圆心 O 在等腰直角三角形 ABC 的内部， $\angle BAC=90^\circ$ ， $OA=1$ ， $BC=6$ ，则 $\odot O$ 的半径为 ()

- A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{13}$

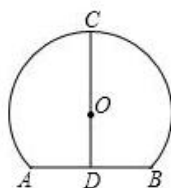


考点 5: 垂径定理在实际中的应用

例 1 工程上常用钢珠来测量零件上小孔的直径. 假设钢珠的直径是 10 mm, 测得钢珠顶端离零件表面的距离为 8 mm, 如图所示, 则这个小孔的直径 AB 是_____mm.



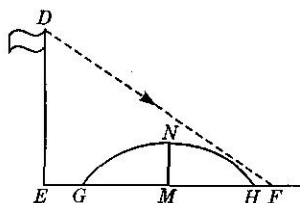
例 2 (2013•绍兴) 绍兴市著名的桥乡, 如图, 石拱桥的桥顶到水面的距离 CD 为 8m, 桥拱半径 OC 为 5m, 则水面宽 AB 为 ()



例 3 某地有一座圆弧形拱桥, 桥下水面宽度为 7.2 m, 拱顶高出水面 2.4 m, 现有一艘宽 3 m、船舱顶部高出水面 2 m 的货船要经过这里, 此货船能顺利通过这座拱桥吗? 写出你的结论, 并说明理由。



例 4 如图所示, 某小组发现 8 米高旗杆 DE 的影子 EF 落在了包含一圆弧型小桥在内的路上, 于是他们开展了测算小桥所在圆的半径的活动. 小刚身高 1.6 米, 测得其影长为 2.4 米, 同时测得 EG 的长为 3 米, HF 的长为 1 米, 测得拱高 (弧 GH 的中点到弦 GH 的距离, 即 MN 的长) 为 2 米, 求小桥所在圆的半径.



能力提升

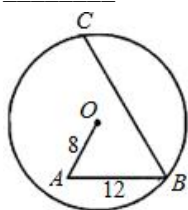
题型 1：垂径定理应用

例 1 如图，P 为半径为 5 的 $\odot O$ 内一点，且 $PO=3$ ，在过点 P 的所有 $\odot O$ 的弦中，弦长为整数的弦有 ()

- A. 2 条 B. 3 条 C. 4 条 D. 5 条

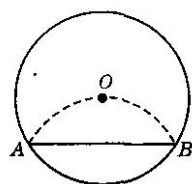
例 2 一条水平铺设的直径为 2 米的通水管道横截面，其水面宽为 1.6 米，则这条管道中此时水最深为_____米.

例 3 如图所示，在圆 $\odot O$ 内有折线 $OABC$ ，其中 $OA=8$ ， $AB=12$ ， $\angle A=\angle B=60^\circ$ ，则 BC 的长为_____.



题型 2：圆中翻折求折痕

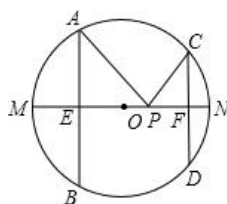
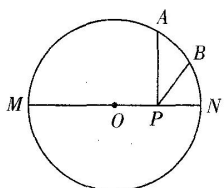
例 1 如图，将半径为 2cm 的圆形纸片折叠后，圆弧恰好经过圆心 O，则折痕 AB 的长为_____.



题型 3：圆中求最短距离

例 1 如图，点 A 是半圆上一个三等分点，点 B 是 \widehat{AN} 的中点，点 P 是直径 MN 上一动点， $\odot O$ 的半径为 1，则 $AP+BP$ 的最小值为_____.

例 2 (2014•张家界) 如图， AB 、 CD 是半径为 5 的 $\odot O$ 的两条弦， $AB=8$ ， $CD=6$ ， MN 是直径， $AB \perp MN$ 于点 E， $CD \perp MN$ 于点 F，P 为 EF 上的任意一点，则 $PA+PC$ 的最小值为_____.

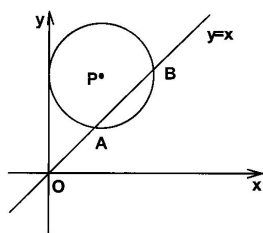


题型 4：圆与三角函数结合

例 1 已知 $\odot O$ 的半径 OA 为 1，弦 AB 的长为 $\sqrt{2}$ ，若在 $\odot O$ 上找一点 C ，使 $AC = \sqrt{3}$ ，则 $\angle BAC = \underline{\quad \blacktriangle \quad}^\circ$ 。

题型 5：圆与一次函数图像结合

例 1 （2014•四川泸州）如图，在平面直角坐标系中， $\odot P$ 的圆心坐标是 $(2, a)$ ($a > 2$)，半径为 2，函数 $y = x$ 的图象被 $\odot P$ 截得的弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，则 a 的值是_____。



题型 6：探究圆中动点问题

例 1 已知半径为 2 的 $\odot O$ 与直线 l 相交于点 A ，且过圆心的直径 $BA \perp l$ ，点 P 是直径 AB 左侧半圆上的动点，过点 P 作直线 l 的垂线，垂足为 C ， PC 与 $\odot O$ 相交于点 D ，连接 PA 、 PB ，且 $\angle PAC = \angle PBA$ ，设 PC 的长为 x ($2 < x < 4$)。

(1) 当 $x = \frac{9}{4}$ 时，求弦 PA 、 PB 的长度；

(2) 当 x 为何值时， $PD \cdot CD$ 取最大值？并求出此最大值。

